

I testi dei problemi

Problema 1

Rispetto a un riferimento cartesiano ortonormato si conoscono i vertici $A(4; 3; 1)$ e $C(0; 4; 2)$ di una diagonale della base di una piramide retta a base quadrata $ABCDV$. Si sa inoltre che il vertice V della piramide appartiene alla retta passante per i punti $P(5; 4; 1)$ e $Q(1; 7; 6)$.

Determinare:

- Le coordinate del vertice V .
- Le coordinate dei restanti vertici B e D della base.
- L'ampiezza dell'angolo tra una faccia laterale e la base.
- L'equazione cartesiana della sfera inscritta nella piramide.

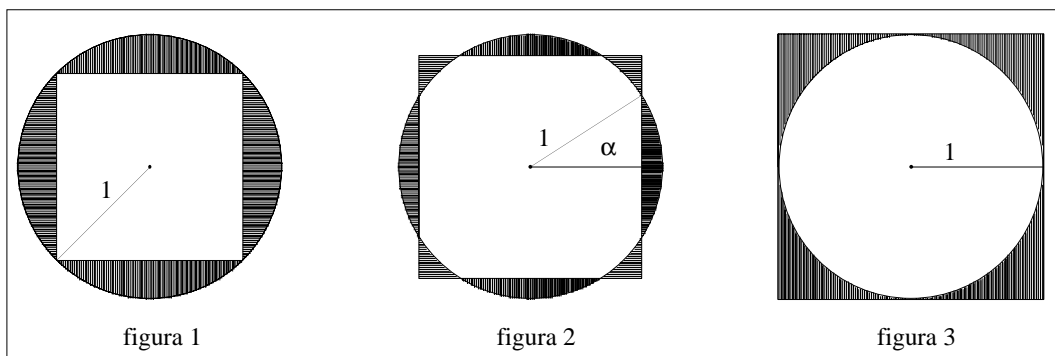
Problema 2

Si studi in modo completo la funzione reale

$$f : x \rightarrow \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1} + 5[\ln(x+1) - \ln(x-1)]$$

Problema 3

Sono dati un cerchio di raggio 1 e un quadrato concentrico al cerchio.



Al variare del lato del quadrato da $\sqrt{2}$ (figura 1), a 2 (figura 3) varia in modo continuo l'area della superficie tratteggiata (cioè la superficie racchiusa dalla circonferenza e dal contorno del quadrato).

Per quali valori del lato in $[\sqrt{2}, 2]$ quest'area è rispettivamente minima e massima?

Sono richiesti i valori esatti di queste misure.

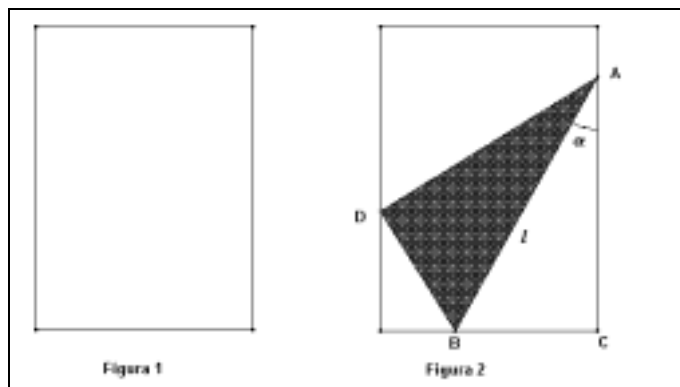
Consiglio: si scelga come variabile α , l'angolo in radianti tra un raggio parallelo ad un lato del quadrato e il raggio che passa per il più vicino punto d'intersezione della circonferenza con il contorno del quadrato (vedi figura 2).

Problema 4

Considera un foglio A4 disposto come nella *figura 1*.

L'angolo in basso a destra viene piegato fino a quando il suo vertice raggiunge il bordo di sinistra (in modo che la parte piegata sia un triangolo; vedi *figura 2*).

Sia l la misura della piega AB e α l'ampiezza dell'angolo che questa forma con il bordo destro.



Determinare:

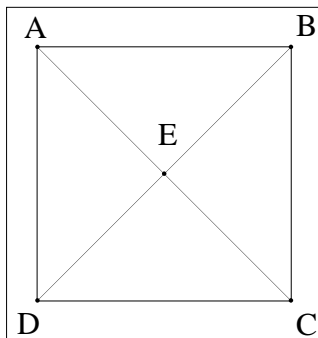
a) La misura di l in funzione di α , specificando in che intervallo può variare α .

In un foglio A4 il rapporto tra le dimensioni è $\sqrt{2}$

b) I valori estremi di l (specificandone la natura) e le corrispondenti ampiezze α .

Problema 5

Consideriamo l'insieme H dei quattro vertici A, B, C, D e del centro E del quadrato ABCD.



Due punti di H sono vicini se il segmento che li unisce non contiene, oltre ai suoi estremi, nessun altro punto di H.

Un automa, partendo da uno dei cinque punti di H, si sposta, compiendo un passo, in uno dei punti vicini, in modo casuale ed equiprobabile.

Un percorso è una successione di passi consecutivi e indipendenti (per esempio il percorso ABAED è la successione dei quattro passi AB, BA, AE, ED).

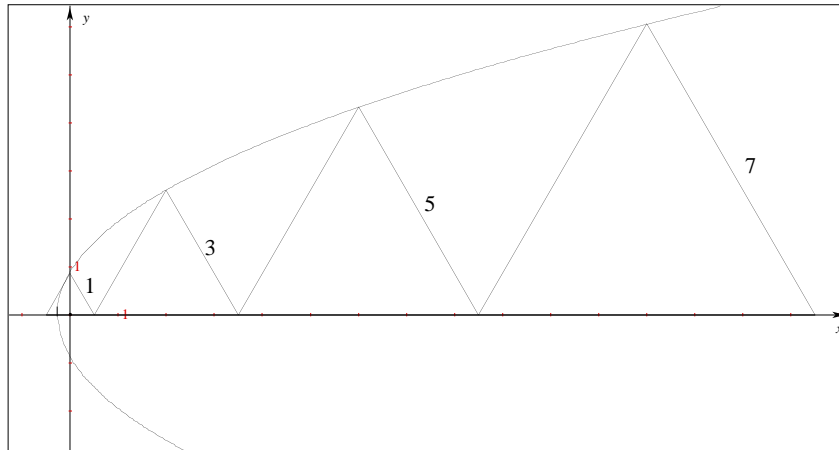
Sia e_n la probabilità che l'automa, partendo da A, arrivi, in n passi in E.

a) Calcolare dapprima e_0, e_1, e_2, e_3

b) Determinare e_n e calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n$.

Problema 6

Si dispongono dei triangoli equilateri con i lati di lunghezza 1, 3, 5, ..., $2n - 1$, lungo una retta come mostrato nella figura.



Si tratta di dimostrare che i vertici A_1, A_2, A_3 che non giacciono sulla retta, appartengono ad una parabola e che le distanze di questi punti dal fuoco della parabola sono numeri naturali.

Problema 7

Si determini il più piccolo numero naturale con la proprietà che la somma delle sue cifre non divide la somma dei cubi delle sue cifre.

Problema 8

Si consideri la seguente suddivisione dei numeri naturali in sottoinsiemi: $\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10\}, \{11,12,13,14,15\}, \dots$ Si eliminino ora tutti i sottoinsiemi in posizione pari, a cominciare dal secondo. Si dimostri che la somma di tutti i numeri nei primi k gruppi rimanenti è data da k^4 .

Ad esempio per $k = 3$ vale: $1 + (4 + 5 + 6) + (11 + 12 + 13 + 14 + 15) = 81 = 3^4$.

Problema 9

Siano A, B, C tre punti qualsiasi di una parabola, con l'asse di simmetria parallela all'asse y. Sia m_A la pendenza della tangente alla parabola per A, m_{AB} la pendenza della corda AB, ecc. Si dimostri la sorprendente proprietà:

$$m_A = m_{AB} + m_{AC} - m_{BC}$$

Problema 10

Una corda di lunghezza costante scivola in un cerchio dato. Gli estremi della corda vengono proiettati ortogonalmente su un diametro fissato. Le proiezioni ottenute e il punto medio della corda sono i vertici di un triangolo. Si dimostri che il triangolo è isoscele e non cambia mai la sua forma allo spostarsi della corda nel cerchio.

[Usare Cabri, Mathematica o Derive per dimostrare (?) illustrare (?), aiutare gli studenti a congetturare (?) la verità o falsità delle affermazioni relative ai problemi 11 - 15].

Problema 11

Detto G il baricentro di un triangolo qualsiasi, i segmenti che congiungono i tre vertici del triangolo con G dividono il triangolo dato in tre triangoli aventi la stessa area.

Problema 12

Dato un triangolo di vertici A, B e C, sia H il suo ortocentro. Il triangolo ABH ha come ortocentro il punto C.

Problema 13

Dato un triangolo, chiamiamo triangolo ortico il triangolo avente come vertici i piedi delle sue tre altezze. L'ortocentro di un triangolo è incentro del suo triangolo ortico.

Problema 14

Il circocentro, il baricentro e l'ortocentro di un triangolo sono allineati. La retta che li contiene si dice retta di Eulero.

Problema 15

Sia dato un triangolo di vertici A, B e C e sia G il suo baricentro. Siano A', B', C' i punti medi dei lati del triangolo. Chiamiamo circonferenza di Feuerbach la circonferenza circoscritta al triangolo $A'B'C'$. La circonferenza di Feuerbach contiene i piedi delle altezze del triangolo ABC e i punti medi dei tre segmenti che uniscono i tre punti A, B e C con l'ortocentro del triangolo ABC.

Problema 16

(Maturità Scient. Sperimentale, Sessione suppletiva 1997 – Tema 2)

Il candidato rappresenti graficamente la curva d'equazione

$$x^2 y = a^2 (a - y) \quad (1)$$

essendo a una costante positiva. La curva assegnata figura nelle "Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana" (1748) di Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) - donde il nome di versiera dell'Agnesi - come soluzione del seguente problema:

“Dato il semicircolo ADC del diametro AC, si ricerca fuori di esso il punto M tale che condotta MB normale al diametro AC, che taglierà il circolo in D, sia $AB : BD = AC : BM$, e perché infiniti sono i punti M che soddisfano il problema, se ne dimanda il luogo”.

Il candidato:

a) verifichi che, con un'opportuna scelta del sistema di riferimento cartesiano, la (1) è l'equazione del luogo geometrico richiesto nell'enunciato del problema (si ponga $AC = a, B \in AC$;

- b) dette P_1 e P_2 , rispettivamente, le intersezioni con l'asse x delle tangenti alla curva nei punti di flesso F_1 e F_2 , calcoli l'area della regione di piano delimitata dall'arco di curva di estremi F_1 e F_2 e dai segmenti P_1F_1 , P_2F_2 , P_3F_3 ;
- c) verifichi che l'area (della regione) compresa fra la curva e l'asse delle x è quattro volte quella del cerchio di diametro AC.

Problema 17

Sono assegnate tre rette parallele nel piano. Esiste un triangolo equilatero con i vertici rispettivamente sulle tre rette?

Problema 18

Data una retta e due punti appartenenti allo stesso semipiano con origine la retta, costruire la circonferenza passante per tali punti e tangente alla retta.

Problema 19

Costruire una circonferenza C' tangente ad una circonferenza C e ad una retta d conoscendo uno dei punti di contatto.

Problema 20

Date due circonferenze esterne tra loro e di diverso raggio, determinare i centri delle due omotetie in cui si corrispondono.

Problema 21

Siano A e B due punti situati esternamente e da parti opposte della striscia individuata da due rette parallele d_1 e d_2 . Costruire il minimo percorso AMNB che unisce i punti A e B con $M \in d_1, N \in d_2$ e MN perpendicolare alle rette.

Problema 22

Date due semirette a e b di origine O e due punti P e Q interni all'angolo convesso individuato dalle due semirette, determinare due punti $R \in a, S \in b$, tali che $PR + RS + SQ$ sia il percorso minimo. Ripetere l'esercizio toccando prima la semiretta b e poi la semiretta a . Quando i due percorsi risultano uguali?

Problema 23

Data una retta r ed un segmento AB situato in uno dei due semipiani di origine r , determinare il punto di r che vede il segmento AB sotto l'angolo massimo.

Problema 24

Dati tre punti A, B e C non allineati, trovare il punto P tale che $PA + PB + PC$ sia minimo.

Problema 25

Si consideri un segmento di lunghezza costante con gli estremi sugli assi cartesiani. Determinare il luogo descritto da un punto P del segmento al variare della posizione degli estremi del segmento stesso.

Problema 26

Dati due punti A e B e un numero positivo k , determinare il luogo dei punti P del piano per cui vale k il rapporto delle distanze di P da A e da B.

Problema 27

Dimostrare la disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

Problema 28

Visualizzare l'andamento delle somme parziali della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ per z complesso.

Analisi qualitativa della convergenza.

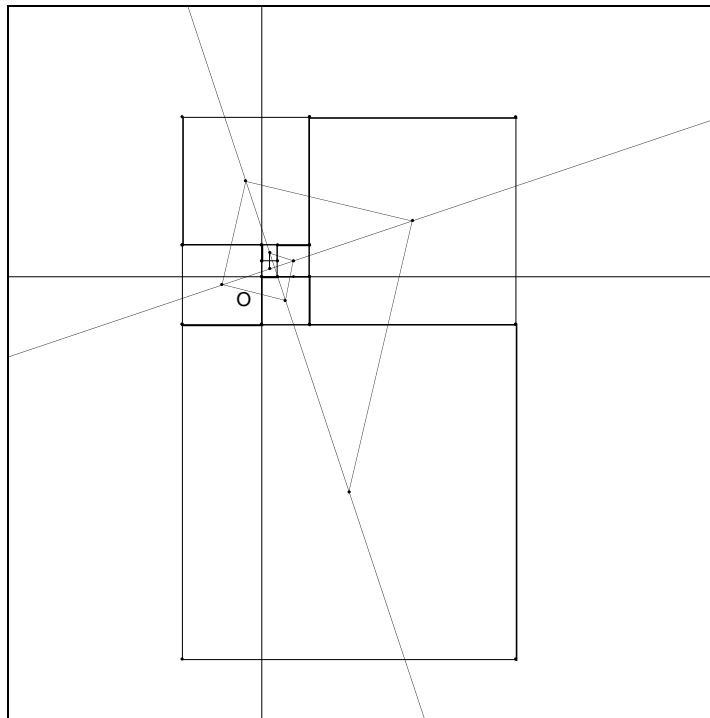
Eventualmente: problemi analoghi per la serie esponenziale $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ e per la serie logaritmica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n/n$

Problema 29

Mostrare che le bisettrici degli angoli di un parallelogramma si incontrano nei vertici di un rettangolo. Determinare il parallelogramma per il quale tale rettangolo è un quadrato. Determinare il parallelogramma per il quale le bisettrici sono concorrenti.

Problema 30

Le misure dei lati dei quadrati della figura sono i numeri di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8,



E' vero che i centri di questi quadrati giacciono su due rette perpendicolari?

Problema 31

Si consideri la figura seguente. Si verifichi che se la costruzione viene proseguita all'infinito, la figura resta limitata.

